

# 基于方向信息测度的非线性扩散图像去噪方法

李学玲 齐国清

(大连海事大学信息工程学院, 大连 116026)

**摘要** 在研究非线性扩散方法图像去噪的基础上, 针对非线性系数扩散问题, 提出了应用图像方向信息控制扩散系数的非线性扩散方法, 该方法利用方向信息测度来表征图像的区域性质, 不仅降低了噪声的干扰, 而且克服了其他方法必须先进行高斯卷积的影响, 并有效控制了各点的扩散行为。实验结果证明该方法是可行的, 该方法在图像去噪的同时保持了图像的重要特征, 取得比较理想的效果。

**关键词** 图像去噪 各向异性扩散 方向信息测度

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2008)03-0400-06

## An Image Denoising Method Based on Nonlinear Diffusion and Orientation Information Measure

LI Xue-ling, QI Guo-qing

(Information Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026)

**Abstract** Comparing with the traditional image denoising methods, nonlinear diffusion has a very good performance in preserving the important characteristics of the image. Since the day the nonlinear diffusion method was proposed, a number of work has been done continuously to research and improve it. In this paper, a new nonlinear diffusion method is proposed in which the orientation information measure is used to control the diffusion coefficient. The orientation information measure can efficiently reflect the area character of the image. It also decreases the influence of noises without Gaussian convolution. The experimental results demonstrate that the proposed method works well for image denoising while edge and detail information is substantially preserved.

**Keywords** image denoising, anisotropic diffusion, orientation information measure

## 1 引言

在图像处理和图像分析领域, 去除噪声是一个长期存在的问题, 传统的去噪方法一般是采用模板对图像进行线性滤波, 如中值滤波、均值滤波、维纳滤波等, 其去噪过程通常是对图像中的高频成分进行抑制或滤除, 以达到去除噪声的效果, 但由于图像的细节如边缘和纹理等也分布在高频领域, 所以在对噪声进行滤除的同时也会使图像的细节部分变得模糊<sup>[1, 2]</sup>。为此人们进行了大量研究, 提出了很多种新的改进方法, 如小波阈值、基于秩阶的滤波方

法、基于马尔可夫场的模型、基于偏微分方程和 LP 的正则方法等, 这些方法目的都是对图像进行非线性滤波, 其在去除图像噪声的同时, 可保留其边缘信息, 以取得良好的视觉特性。非线性扩散方法作为这一领域重要工具之一, 从提出以来一直受到人们的极大关注<sup>[3, 4]</sup>。

1990年, Perona 和 Malik 开创性地提出了扩散的程度应同图像的内容相联系, 他们把图像处理转化为对偏微分方程(PDE)的求解, 对区域内和区域间采取不同的滤波策略, 其主要思想是在滤波的过程中引入了边缘检测的步骤, 这样能兼顾平滑和保留边界<sup>[5]</sup>。1992年, Catté 等人对 Perona 和 Malik 的

算法进行了改进,将高斯平滑引入到扩散过程的控制函数中,以减小噪声影响和改善方程的适定性<sup>[6]</sup>。此后人们在他们提出的模型的基础上不断提出不同的算法,并对某些方面进行了改进<sup>[1-3,7-11]</sup>。改进主要集中于在热扩散方程中根据图像邻域特征,通过设计合适的扩散系数来控制扩散方程的扩散行为,其目的是使得在图像平滑去噪的同时,能够保留图像的特征信息,即对图像进行自适应的非线性滤波去噪。这些扩散方程在计算扩散系数之前,大多是先将图像与高斯函数进行卷积<sup>[1-3,6-11]</sup>,以降低噪声干扰和增加偏微分方程解的适定性,但是由于高斯平滑本身就相当于对图像进行各向同性低通滤波,且高斯函数的方差 $\sigma$ 本身不易确定,因此选取的 $\sigma$ 太小,会使图像不够平滑,而太大则会使导数的估计出现大的偏差,因为高斯核会使极值点发生漂移<sup>[2]</sup>。另外,由于扩散系数大多是标量,因此从热传导的观点来看,这些方程本质上是一种同性扩散<sup>[7]</sup>。

本文使用一种新的测量图像性质的标度——方向信息测度来确定扩散系数。由于方向信息测度能够科学地反应图像的区域特征,且受噪声影响小,无需将图像与高斯函数卷积,这不仅解决了上述高斯平滑的矛盾,且最后能够得到矢量形式的扩散系数,所以能够很好地控制扩散行为,并能取得良好的去噪效果。

## 2 非线性各向异性热扩散方程

为了说明问题,下面首先给出在热力学应用背景下的热扩散方程及其物理意义。各向导异性的平面介质区域 $\Omega$ 内的热流密度场、温度场、温度梯度场有如下关系<sup>[7]</sup>:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \cdot \nabla u \quad (1)$$

式中, $\mathbf{q}$ 表示热流密度场, $\nabla u$ 为温度的梯度, $\mathbf{D}$ 为导热系数,一般情况下,导热系数是时间和空间的函数矩阵。由能量守恒定律可得到导热能量方程的微分形式,即以下热扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\mathbf{D} \cdot \nabla u) \quad (2)$$

式中, $\text{div}$ 为散度算子, $\mathbf{D}$ 在热扩散方程中称扩散系数矩阵。

在图像处理中,可以把平面区域的温度在每一点的取值映射为图像在该点的灰度值,那么热扩散

过程就变为了图像的平滑去噪过程。

Perona和Malik提出了基于各向异性扩散的图像平滑思想<sup>[5]</sup>,由于文献[5]方法克服了传统的线性平滑滤波器的主要缺陷,因此使平滑后的图像质量有很大的改善。PM各向异性扩散方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(C(|\nabla u|) \cdot \nabla u) \quad (3)$$

式中, $u(x,y)$ 为演化图像(简称为 $u$ ); $\text{div}$ 为散度算子, $\nabla u = [u_x \ u_y]$ 为图像的梯度; $|\nabla u| = (u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$ 为图像的梯度模; $C(|\nabla u|)$ 是图像梯度模的函数,也称为扩散方程的扩散系数。

PM方程一般选取的扩散系数为

$$C(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + (|\nabla u|^2/k^2)} \quad (4)$$

$$C(|\nabla u|) = \exp\left(-\left(\frac{|\nabla u|}{k}\right)^2\right) \quad (5)$$

可见一般扩散系数与梯度模大小有关,与方向无关。当图像邻域内变化较大,即属高频细节信息部分时,则梯度模增大,扩散系数减小,即扩散速度下降,图像的重要特征得到保持;反之,在平滑域则快速扩散平滑。设初始值为输入图像,式(3)给出了在 $t$ 时刻图像演化的结果。PM扩散方程的这些性质有赖于对图像边缘特征的良好描述。但是在较大的噪声时,图像梯度具有很大的不确定性,这难以真实反映图像的边缘特征信息,此时PM方程往往表现出病态且不稳定,所以研究者们对PM方程做了一些改进。Catt等人给出的扩散方程<sup>[6]</sup>为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(C(|\nabla(G_\sigma * u)|) \cdot \nabla u) \quad (6)$$

式中, $G_\sigma$ 是方差为 $\sigma$ 的高斯函数,\*为卷积运算。平滑的常用函数为2维高斯函数

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (7)$$

下面给出形式较简明、物理意义直观的PDE形式。令 $\eta$ 为图像的梯度方向(即等灰度轮廓线的法方向), $\xi$ 为该梯度方向的垂直方向。设梯度沿 $\eta$ , $\xi$ 方向的扩散系数分别为 $C_\eta$ , $C_\xi$ ,则梯度与梯度产生的流之间的关系可以表示为

$$\hat{\mathbf{q}} = - \begin{bmatrix} C_\eta & 0 \\ 0 & C_\xi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\eta \\ u_\xi \end{bmatrix} \quad (8)$$

扩散方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div}(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{\partial(C_\eta \cdot u_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(C_\xi \cdot u_\xi)}{\partial \xi} \quad (9)$$

在图像定义域中的点  $X$  处, 如果考虑到扩散系数  $C_\eta$ 、 $C_\xi$ , 仅为时间的变量, 扩散方程可以改写为如下形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_\eta \cdot u_{\eta\eta} + C_\xi \cdot u_{\xi\xi} \quad (10)$$

$u_{\eta\eta}$ ,  $u_{\xi\xi}$  表示  $u(x, y)$  沿坐标  $\eta$ ,  $\xi$  方向上的二阶方向导数, 式(10) 为图像在点  $X$  处的扩散方程, 此方程不仅能很好地刻画图像在点  $X$  处的扩散行为, 并且具有明确的物理意义。

### 3 基于方向信息测度的非线性扩散方法

非线性扩散的关键是根据图像上各点的不同性质确定扩散系数, 首先得到一个表征各点热流密度的矢量场, 为此本文引入利用文献[13]提出的图像方向信息测度来度量图像上各点不同的性质。图像方向信息测度定义如下:

设  $(x, y)$  为当前像素点的坐标,  $f(x, y)$  为该点的灰度值,  $R$  是以该点为中心的正方形邻域,  $l_\theta$  是通过该沿  $\theta$  方向的直线, 将  $R$  分为面积相等的两部分  $s_1$  和  $s_2$  (如图 1 所示),  $g_{s_1\theta}$ ,  $g_{s_2\theta}$  是分别对  $s_1$  和  $s_2$  区域像素点灰度值的积分,  $g_{s_1\theta} = \iint_{s_1\theta} f(x, y) dx dy$ ,  $g_{s_2\theta} = \iint_{s_2\theta} f(x, y) dx dy$ 。

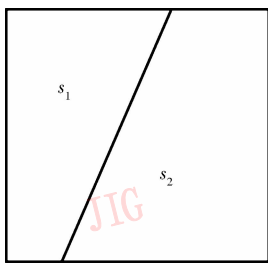


图 1 方向信息测度图

Fig. 1 Graphs of orientation information measure

设  $d_\theta = |g_{s_1\theta} - g_{s_2\theta}|$ , 则方向性图像信息测度定义为

$$M_{x,y} = \frac{(d_\theta)_{\max}}{S} \quad (11)$$

其中,  $(d_\theta)_{\max} = \max_{0^\circ \leq \theta < 180^\circ} (d_\theta)$ ,  $S$  为邻域面积的  $\frac{1}{2}$ 。

最后用得到的  $\{M_{x,y}, \theta_{x,y}\}$  表征该点在领域变化特征的强度和方向,  $M_{x,y}$  是方向信息测度,

$$\theta_{x,y} = \theta_{\max}。$$

由上面定义可以直观看出, 由于在图像中边缘上的方向性测度在观察尺度小和大时都较大, 平滑域的方向性信息测度在观察尺度小和大时都比较小, 而纹理点的方向性信息测度在观察尺度小时比较大, 并表现出边缘性, 而在观察尺度大时则比较小, 表现出平滑性, 因此方向信息测度可以有效表征图像上各点性质。

图像本身各区域的变化趋势从强度和方向上都表现出一定的规律性。相比之下, 噪声在各点随机产生, 由于没有方向性, 越大的邻域取平均, 越接近于噪声均值, 方向信息测度在区域内分块平均, 因此可以尽量消除噪声干扰, 同时对本身值并不产生影响。与梯度模 ( $|\nabla u|$ ) 对比实验结果证明, 方向信息测度不但能够有效地表征图像的变化趋势, 即自身具有方向性, 而且抗噪声能力较强, 这就免去了以往扩散过程中高斯函数方差选取的困扰和高斯平滑线性滤波对图像本身特性的影响。无噪声情况下, 梯度模和方向信息测度虽都可以理想地表征图像的变化趋势 (如图 2(a) ~ 图 2(c) 所示)。但是梯度模对噪声很敏感 (如图 2(h) 所示), 噪声严重干扰了梯度信息。信息测度有很强的抗噪性 (如图 2(f) 所示), 且邻域块越大抗噪声能力越强 (如图 2(g) 所示), 一般高斯函数的  $\sigma$  太小无法有效抑制噪声 (如图 2(i) 所示), 而  $\sigma$  较大虽然可以抑制噪声 (如图 2(j) 所示), 但有可能使导数出现较大的偏差, 且扩散过程中线性滤波平滑, 会对图像本身产生不良影响, 即细节易丢失。

如上所述, 方向信息测度不仅能够良好地表征像素点的特征, 并且能够克服高斯平滑各向同性的缺点, 具有较高的抗噪性。为此本文提出了基于图像方向信息测度的非线性扩散方程。据式(4) 即可得到基于方向信息测度的扩散系数

$$C(M_{x,y}) = \frac{1}{1 + (|M_{x,y}|^2/k^2)} \quad (12)$$

式中,  $k$  为扩散阈值, 用于控制扩散速度。因为  $M_{x,y}$  由以该点为中心的小邻域性质决定, 且具有方向性  $d_\theta$ , 所以不仅可以克服各向同性扩散的缺点, 并且与梯度没有直接关系, 可以只将其作为时间的变量得到, 直接得到  $x, y$  方向的扩散系数

$$C_x = C(M_{x,y}) \cdot \cos(\theta_{x,y}) \quad (13)$$

$$C_y = C(M_{x,y}) \cdot \sin(\theta_{x,y}) \quad (14)$$

据式(10) 即可得到本文的扩散方程

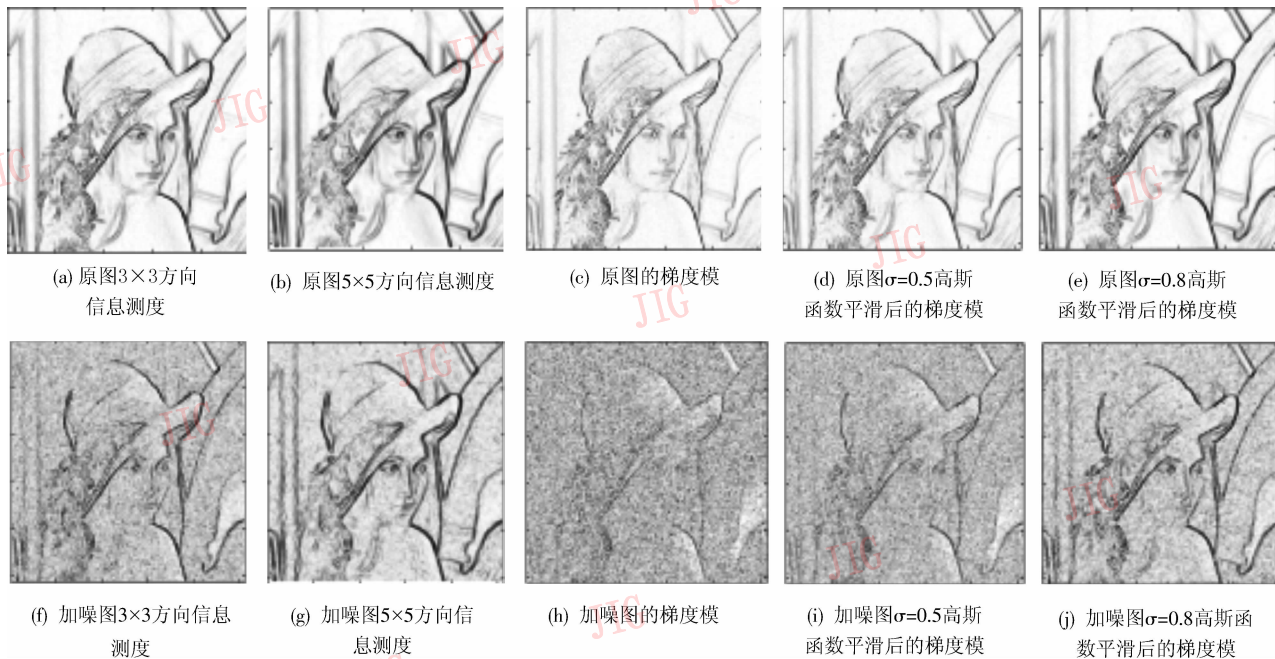


图 2 方向信息测度与梯度模的对比实验结果

Fig. 2 Gradient magnitude and orientation information measure comparison experiment result

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_x \cdot u_{xx} + C_y \cdot u_{yy} \quad (15)$$

$u|_{t=0} = I$ ,  $I$  为开始输入的图像,从式(15)可以看出此方程实现了真正意义上的各向异性扩散。

### 4 计算步骤及实验结果

将连续域上的图像  $u(x, y, t)$  离散化,并用  $u(ih, jh, nT)$  表示,其中  $T, h$  分别为时间步长和空间步长,  $(i, j)$  表示图像在离散网格上的位置,  $n$  为迭代次数。为了书写方便,可把  $u(ih, jh, nT)$  简写为  $u_{i,j}^{(n)}$ , 对于式(15),主要采用迎风格式进行差分。首先对时间方向导数  $\partial u / \partial t$  采用如下形式近似:

$$\frac{u_{i,j}^{(n+1)} - u_{i,j}^{(n)}}{T}$$

其中

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1,j}^{(n)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)}}{h^2}$$

$$u_{yy} = \frac{u_{i,j+1}^{(n)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}}{h^2}$$

本文在离散域计算方向信息测度选用

大小  $3 \times 3$  邻域模块,应用  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4 个算子取得当前像素点的  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  和  $135^\circ$  4 个方向的  $d_{i,j}$ , 用于进行计算比较,据此式(11)得到这点的方向信息测度的强度  $M_{i,j} = \max(d_{i,j\theta})$ , 其中  $\theta = \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$  和方向  $\theta_{i,j}$ 。据式(12) ~ 式(14)得到  $C_x$  和  $C_y$ 。 $C(M_{i,j}) = \frac{1}{1 + (|M_{i,j}|^2/k^2)}$ ,  $C_x = C(M_{i,j}) \cdot \cos(\theta_{i,j})$ ,  $C_y = C(M_{i,j}) \cdot \sin(\theta_{i,j})$ 。

由式(15)可以导出以下离散形式的简单直观的扩散公式:

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + T(C_x \cdot u_{xx} + C_y \cdot u_{yy}) \quad (16)$$

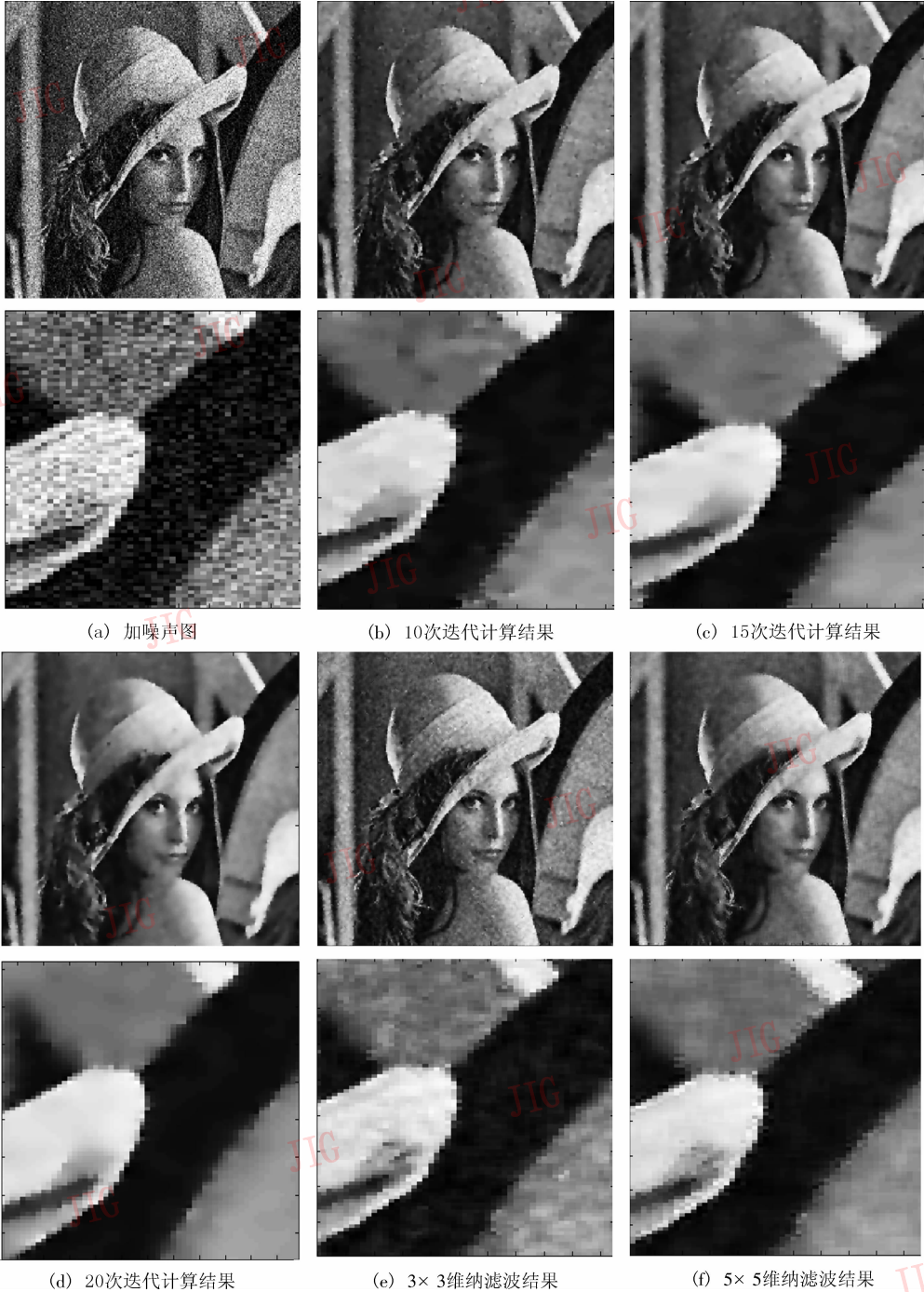
从  $n$  步到  $n+1$  步的数值计算步骤如下:

- ①输入图像;
- ②计算输入图像方向信息测度  $M_{i,j}$  及  $\theta_{i,j}$ ;
- ③计算扩散系数  $C_x$  和  $C_y$ ;
- ④用式(16)计算  $u^{(n+1)}$ ;
- ⑤输出图像  $u = u^{(n+1)}$ 。

为验证本文方法结果,首先利用  $256 \times 256$  的 Lena 图像对本文提出的方法进行了实验验证。考虑迭代格式的稳定性<sup>[7]</sup>,一般选取  $T/h < 1/4$ ,在实验中取时间步长  $T = 0.25$ ,空间步长

$h = 1, k$  由图像信息测度的统计数值特征决定。因为扩散次数较少会导致去噪不足,次数过多会造成图像模糊,所以根据经验进行 15 次迭代。图 3(a)是加噪声的图像,图 3(b)是利用本文算法迭代 10 次计算的结果,图 3(c)是利用本文算法迭代 15 次计算的结果,图 3(d)是利用本文算法迭代 35 次计算的结果,图 3(e)是利用  $3 \times 3$  维

纳滤波进行去噪的效果,图 3(f)  $5 \times 5$  维纳滤波去噪的效果。从实验结果可以看出,在扩散过程中,图像平滑区内部不断得到平滑,而在边缘上则是没有扩散,即较好地保持了边缘细节信息。此外,还用不同的图像进行了对比实验,结果表明,本文提出的方法与普通的非线性扩散图像去噪方法相比,效果更好。



(a) 加噪声图

(b) 10次迭代计算结果

(c) 15次迭代计算结果

(d) 20次迭代计算结果

(e)  $3 \times 3$ 维纳滤波结果

(f)  $5 \times 5$ 维纳滤波结果

图 3 使用本文扩散方法的去除高斯噪声的结果(上:全图;下:局部)

Fig. 3 The result of removing image Gauss noise with diffusion method designed in this paper

## 5 结 论

本文在 Perona 和 Malik 以及 Catté 等人工作的基础上对去噪方法进行了改进,在非线性和扩散方程中引入了图像方向信息测度用来控制扩散系数。由于图像方向信息测度对图像性质具有良好的分类能力,同时具有方向性,并且具有较强的抗噪性能,所以免除了以往扩散过程中每一步要先进行高斯平滑的影响。实验结果证明了基于图像方向信息测度的非线性扩散的有效性,在去除噪声和保持图像重要特征方面效果明显,尤其对于平滑域较多的图像效果更加理想。

### 参考文献 (References)

- 1 Wang Zheng-ming, Xie Mei-hua. A review of the application of partial differential equation in image denoising[J]. *Mathematica Applicata*, 2005, **18**(2): 219 ~ 224. [王正明, 谢美华. 偏微分方程在图像去噪中的应用[J]. *应用数学*, 2005, **18**(2): 219 ~ 224.]
- 2 Lin Zhou-chen, Shi Qing-yun. An anisotropic diffusion equation that can remove noise and keep naturalness[J]. *Chinese Journal of Computers*, 1999, **22**(11): 1133 ~ 1138. [林宇辰, 石青云. 一个能去噪和保持真实感的各向异性扩散方程[J]. *计算机学报*, 1999, **22**(11): 1133 ~ 1138.]
- 3 Jia Di-ye, Huang Feng-gang, Su Han. New noise removal method based on fourth-order nonlinear diffusion [J]. *Chinese Journal of Computer*, 2005, **28**(5): 882 ~ 891. [贾迪野, 黄凤岗, 苏菡. 一种新的基于高阶非线性扩散的图像平滑方法[J]. *计算机学报*, 2005, **28**(5): 882 ~ 891.]
- 4 Gilboa Guy, Sochen Nir, Zeevi Yehoshua Y. Forward-and-backward diffusion processes for adaptive image enhancement and denoising[J]. *IEEE Transactions on Image Process*, 2002, **11**(7): 689 ~ 698.
- 5 Perona P, Malik J. Scale space and edge detections using anisotropic diffusion [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 1990, **12**(7): 629 ~ 639.
- 6 Catta F, Lions P L, Morel J, CollT Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992, **29**(1): 182 ~ 193.
- 7 Yuan Jian-ze, Zheng Nan-ning. A design method for nonlinear diffusion filter and its application [J]. *Chinese Journal of Computer*, 2002, **25**(10): 1072 ~ 1076. [袁剑泽, 郑南宁. 一种非线性扩散滤波器的设计方法及其应用[J]. *计算机学报*, 2002, **25**(10): 1072 ~ 1076.]
- 8 Zhang Yuan-lin, Zheng Nan-ning, Yuan Jian-Ze. Improvement of image adaptive nonlinear filtering [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2004, **38**(2): 162 ~ 166. [张元林, 郑南宁, 袁剑泽. 一种改进的图像自适应非线性滤波方法[J]. *西安交通大学学报*, 2004, **38**(2): 162 ~ 166.]
- 9 Zhu Ju-hua. Fingerprint preprocessing method based on nonlinear diffusion equation [J]. *Journal of Data Acquisition & Processing*, 2001, **16**(2): 139 ~ 144. [朱菊华. 一种基于非线性扩散方程的指纹预处理方法[J]. *数据采集与处理*, 2001, **16**(2): 139 ~ 144.]
- 10 Xie Mei-hua, Wang Zheng-ming. Edge-directed enhancing based anisotropic diffusion denoising [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, **34**(1): 59 ~ 64. [谢美华, 王正明. 基于边缘定向增强的各向异性扩散抑噪方法[J]. *电子学报*, 2006, **34**(1): 59 ~ 64.]
- 11 Ding Wen. One class of nonlinear diffusion equation and its application in image inpainting [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2004, **38**(1): 153 ~ 156. [丁雯. 一类非线性扩散问题及其在图像修复中的应用[J]. *上海交通大学学报*, 2004, **38**(1): 153 ~ 156.]
- 12 Wang Xin-nian, Liang De-qun. Orientation information measure based image restoration [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2004, **40**(28): 81 ~ 84. [王新年, 梁德群. 基于方向信息测度的图像恢复[J]. *计算机工程与应用*, 2004, **40**(28): 81 ~ 84.]
- 13 Yang Hai-Jun. Researches on lower level processing issues in image testing and their application in fingerprints identification [D]. *Xi'an Jiaotong University*, 2001. [杨海军. 图像检测中的若干低级处理问题以及在指纹识别中应用的研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2001.]